ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ KHÁNH VÂN

BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG HERMITE–HADAMARD CHO HÀM TIỀN LỒI BẤT BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ KHÁNH VÂN

BẤT ĐẲNG THỨC DẠNG HERMITE–HADAMARD CHO HÀM TIỀN LỒI BẤT BIẾN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}^n$	không gian thực n chiều
$\mathbb{R}^{m\times n}$	không gian các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$
$L[a,b]$	không gian các hàm khả tích trên đoạn $[a,b]$
$L^p[a,b]$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
$\mathbb{B}$	hàm Beta
Γ	hàm Gamma
$\bigtriangledown f$	gradient của hàm f

Mở đầu

Hàm lồi và tập lồi đã được nghiên cứu từ lâu bởi Hölder, Jensen, Minkowski. Đặc biệt với những công trình của Fenchel, Moreau, Rockafellar vào các thập niên 1960 và 1970 đã đưa giải tích lồi trở thành một trong những lĩnh vực phát triển nhất của toán học. Hai tính chất cơ bản của hàm lồi là tính chất đạt giá trị lớn nhất trên biên và bất kỳ cực tiểu địa phương nào cũng là cực tiểu trên tập xác định giúp cho hàm lồi được sử dụng rộng rãi trong toán học lý thuyết và ứng dụng. Bên cạnh đó, một số hàm không lồi theo nghĩa đầy đủ nhưng cũng chia sẻ một vài tính chất nào đó của hàm lồi, chẳng hạn lớp hàm tiền lồi bất biến (preinvex functions)...

Một trong những bất đẳng thức nổi tiếng cho hàm f lồi trên $[a, b] \subset \mathbb{R}$ là bất đẳng thức Hermite–Hadamard:

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

hay ở dạng tương đương:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \ (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2}$$

Có rất nhiều nhà toán học đã nghiên cứu và mở rộng bất đẳng thức Hermite–Hadamard (1) cho các lớp hàm lồi khác nhau và đưa ra nhiều ứng dụng trong chứng minh các bất đẳng thức đại số, hình học, lượng giác khác. Đây là một đề tài được nhiều nhà toán học quan tâm. Do đó, tôi chọn đề tài "Bất đẳng thức dạng Hermite–Hadamard cho hàm tiền lồi bất biến" để nghiên cứu cho luận văn thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp của tác giả.

Mục tiêu của đề tài luận văn là tìm hiểu và trình bày lại một số bất đẳng thức mới được xây dựng từ bất đẳng thức Hermite–Hadamard (1) cho hàm tiền lồi bất biến trong các tài liệu [7] và [8] công bố năm 2019 và 2017.

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương.

Chương 1. Hàm tiền lồi bất biến và một số tính chất

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản về tập lồi, hàm lồi, tập lồi bất biến, hàm tiền lồi bất biến, mối liên hệ giữa hàm tiền lồi bất biến với hàm lồi và một số tính chất cơ bản của hàm tiền lồi bất biến, đưa ra ví dụ về hàm tiền lồi bất biến và cách nhận biết hàm tiền lồi bất biến.

Chương 2. Bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm tiền lồi bất biến

Chương này trình bày một số bất đẳng thức mới dạng Hermite–Hadamard cho một số lớp hàm tiền lồi bất biến, áp dụng để đánh giá một số giá trị trung bình đặc biệt và một số hệ quả về quy tắc ba điểm, quy tắc hình thang, quy tắc Simpson.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy - người đã trực tiếp giúp đỡ, hướng dẫn về kiến thức, tài liệu và phương pháp để tác giả hoàn thành đề tài nghiên cứu khoa học này. Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, cổ vũ, khích lệ và giúp đỡ trong thời gian qua.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2019

Tác giả luận văn

Lê Khánh Vân

Chương 1

Hàm tiền lồi bất biến và một số tính chất

Chương này trình bày một số kiến thức cơ bản của hàm lồi, hàm s-lồi, tập lồi bất biến, hàm tiền lồi bất biến và một số tính chất của hàm tiền lồi bất biến. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1]–[8].

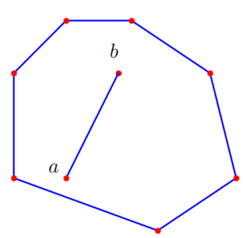
1.1 Hàm s-lồi

1.1.1 Hàm lồi

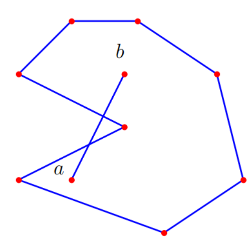
Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$. Tập tất cả các điểm $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ với $0 \le \lambda \le 1$ gọi là đoạn thẳng (đóng) nối a và b, và được ký hiệu là $[a, b]$.

Định nghĩa 1.1.1 (xem [1])**.** Tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu với mọi $\lambda \in [0, 1]$ và mọi $x_1, x_2 \in C$ thì $x_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$.

Như vậy, tập lồi C chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó.



Hình 1.1: Tập lồi



Hình 1.2: Tập không lồi

Định nghĩa 1.1.2 (xem [1]). Cho C là một tập con lồi khác rỗng của không gian $\mathbb{R}^n$, $f : C \to \mathbb{R}$ là hàm số thực xác định trên tập lồi C. Hàm f được gọi là

(i) hàm lồi trên C nếu với mọi $x, y \in C$ và mọi số thực $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.1}$$

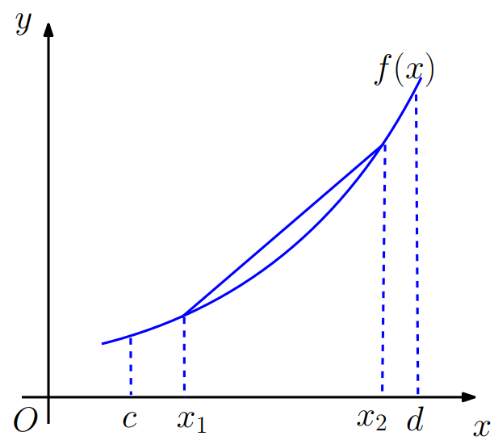
(ii) lồi chặt trên C nếu bất đẳng thức (1.1) là chặt với mọi x khác y, mọi $\lambda \in (0, 1)$.

Nếu $n = 1$, Định nghĩa 1.1.2 cho ta định nghĩa về hàm lồi một biến trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.3 (xem [1]). Hàm $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi nếu với mọi $x, y \in [a, b]$ và $\lambda \in [0, 1]$ thì

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.2}$$

Hàm f được gọi là hàm lõm nếu hàm $(-f)$ là lồi.



Hình 1.3: Hàm lồi.

Sau đây là mối liên hệ giữa hàm lồi và tập lồi.

Định lý 1.1.4 (xem [1]). *Giả sử hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó*

$$C_\lambda := \{x : f(x) < \lambda\}, \quad \overline{C}_\lambda := \{x : f(x) \leq \lambda\}$$

là các tập lồi.

Tập C_λ, $\overline{C}_\lambda$ trong Định lý 1.1.4 gọi là các tập mức dưới.

Định lý 1.1.5 (xem [1])**.** *Cho C là một tập lồi, khác rỗng trong không gian $\mathbb{R}^n$ và $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi. Khi đó, mọi điểm cực tiểu địa phương của f trên C đều là cực tiểu toàn cục.*

Định lý 1.1.6 (xem [1])**.** *Một hàm lồi chặt f trên một tập lồi C có nhiều nhất một điểm cực tiểu trên C.*

Ví dụ 1.1.7. Hàm lồi chặt một biến $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, có duy nhất một điểm cực tiểu $x_0 = 0$. Hàm lồi chặt $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, không có điểm cực tiểu nào.

Sau đây là mối liên hệ giữa hàm lồi n biến và hàm lồi một biến.

Định lý 1.1.8 (xem [1])**.** *Hàm $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ là hàm lồi khi và chỉ khi hàm một biến $\varphi(\lambda) := f(x + \lambda d)$ là hàm lồi theo λ với mỗi $x, d \in \mathbb{R}^n$.*

Chứng minh. Điều kiện cần là rõ ràng. Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử φ là hàm lồi với mọi $x, d \in \mathbb{R}^n$. Lấy x, y bất kỳ thuộc $\mathbb{R}^n$ và đặt $d = x - y$. Khi đó với mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có

$$\begin{aligned} f\big[(1-\lambda)x + \lambda y\big] &= f(x + \lambda d) = \varphi(\lambda) = \varphi\big[(1-\lambda).0 + \lambda.1\big] \\ &\le (1-\lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 1.1.9. Các hàm sau đây là các hàm lồi (một biến):

(i) hàm afin: $ax + b$ trên $\mathbb{R}$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$,

(ii) hàm mũ e^{ax} trên $\mathbb{R}$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.1.10. (i) Mọi hàm chuẩn đều là hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$, trong đó

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ với } \quad p \ge 1 \quad \text{và} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|,$$

với $x = (x_1, \ldots, x_2) \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n$ là một tập lồi khác rỗng, các hàm sau đây là hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$:

(a) Hàm chỉ của C: $\delta_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \in C, \\ +\infty, & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$

(b) Hàm khoảng cách từ điểm $x \in \mathbb{R}^n$ đến $C : d_C(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$.

(iii) Hàm được xác định dưới đây là hàm lồi trên $\mathbb{R}^{m\times n}$ với $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $X = (x_{ij})_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} + b.$$

1.1.2 Hàm s-lồi

Trong mục này ta sử dụng ký hiệu $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

Định nghĩa 1.1.11 (xem [5])**.** Hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ được gọi là

(i) hàm s-lồi loại một nếu

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \tag{1.3}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$ và mọi $\alpha, \beta \geq 0$ với $\alpha^s + \beta^s = 1$, $s \in (0, 1]$;

(ii) hàm s-lồi loại hai nếu bất đẳng thức (1.3) thỏa mãn với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$, và mọi $\alpha, \beta \geq 0$ với $\alpha + \beta = 1$, $s \in (0, 1]$.

Nhận xét 1.1.12. Dễ thấy rằng khi $s = 1$ thì hàm s-lồi (loại một, loại hai) trở thành hàm lồi một biến thông thường xác định trên $[0, +\infty)$.

Ví dụ 1.1.13. Cho $s \in (0, 1)$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa hàm f từ $[0, +\infty)$ vào $\mathbb{R}$ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = 0, \\ bx^s + c, & x > 0. \end{cases}$$

Khi đó,

(i) Nếu $b \geq 0$, $c \leq a$ thì f là hàm s-lồi loại một.

(ii) Nếu $b \geq 0$ và $0 \leq c \leq a$ thì f là hàm s-lồi loại hai.

Chứng minh. (i) Ta xét hai trường hợp sau đây: